PODSTAWOWE ZAGADNIENIA METODOLOGICZNE

1. Wprowadzenie

W ekonomii i naukach o zarządzaniu obserwuje się tendencję do ilościowego opisu zależności miedzy zjawiskami ekonomicznymi.
Umożliwia to
- zobiektywizowanie i usprawnienie procesu podejmowania najlepszych decyzji (podejście aktywne),
- wykrywanie współzależności i stawianie prognoz (podejście pasywne),

na szczeblu
- mikro (przedsiębiorstwo),
- makro (gospodarka, gałąź).

Ekonometria zajmuje się poszukiwaniem zależności ilościowych w życiu gospodarczym przy wykorzystaniu metod analizy statystycznej i stawianiem prognoz.

Badania operacyjne : dziedzina wiedzy zajmująca się poszukiwaniem sposobów podejmowania najlepszych (optymalnych) decyzji.

2. Etapy podejmowania decyzji

W sformalizowanym podejściu do podejmowania decyzji wyróżnia się następujące etapy :
a) sformułowanie problemu,
b) budowa modelu matematycznego,
c) wyznaczenie rozwiązania,
d) ocena rozwiązania,
e) podjęcie decyzji.

Ad. a). Opisujemy w sposób werbalny sytuację decyzyjną : określamy cel analizy i warunki w jakich działamy. Dokonujemy jakościowego opisu uwzględniając :
- cel badania,
- wiedzę teoretyczną o przebiegu zjawisk gospodarczych,
- możliwości zebrania materiału statystycznego,
- koszty analizy, wymagania dot. czasu i dokładności uzyskania wyników, itp.

Ad. b). Dokonujemy 'przetłumaczenia' opisu słownego problemu decyzyjnego na język matematyki konstruując model matematyczny sytuacji decyzyjnej. Nie może być ono całkowicie wierne. Model nie może być zbyt duży (wielkość modelu mierzy się ilością zmiennych i warunków ograniczających) a zależności występujące w modelu zbyt skomplikowane.

Budując model musimy znaleźć kompromis pomiędzy wiernością opisu a złożonością modelu. Abstrahujemy więc od
- związków, które uznajemy za nieistotne,
- zbyt skomplikowanych zależności.

Otrzymujemy problem programowania matematycznego (*PPM*).

Ad. c). Wyznaczamy rozwiązanie optymalne bądź przybliżone.

Ad. d). Konfrontujemy model z rzeczywistością - porównując np. dotychczas podejmowane decyzje z decyzjami sugerowanymi przez model. Najczęściej niezbędna jest przebudowa modelu (uwzględnienie pominiętych zależności, bardziej realistyczne modelowanie skomplikowanych związków itp.).

Ad. e). Podejmujemy decyzję i dokonujemy jej wdrożenia.

3. Wybrane elementy analizy decyzyjnej

Sytuacja decyzyjna – sytuacja w której istnieje więcej niż jeden sposób postępowania.

Decydent : osoba lub grupa osób podejmujących decyzję. W pierwszym przypadku mówimy o decydencie indywidualnym, drugim – zbiorowym (kolegialnym).

Każdy decydent działając w pewnych warunkach stawia sobie jakieś cele.

Warunki te ograniczają swobodę działania decydenta – dlatego noszą nazwę warunków ograniczających. Decyzja spełniająca te warunki nazywa się decyzją dopuszczalną.

Ze względu na postawiony cele jedne decyzje są lepsze, inne gorsze. Decyzję najpełniej realizującą postawiony cel nazywamy decyzją optymalną.

Warunki ograniczające przedstawiać będziemy w postaci układu równań/nierówności.

Preferencje (cele) decydenta przedstawiamy w postaci pewnej funkcji liczbowej nazywanej funkcją celu lub kryterium optymalizacji.

Wynika z tego, ze ograniczamy się do przypadku, kiedy zarówno cele i warunki ograniczające są kwantyfikowalne.

Wielkości na które decydent może wpływać nazywamy zmiennymi decyzyjnymi, a wielkości które pozostają poza kontrolą decydenta – parametrami.

Podejmowanie decyzji od strony formalnej sprowadza się do nadania zmiennym decyzyjnym pewnych wartości.

Decydent maksymalnie realizuje cel nadając zmiennym decyzyjnym wartości maksymalizujące bądź minimalizujące funkcję celu, spełniające warunki ograniczające.

4. Model matematyczny sytuacji decyzyjnej

Każda z decyzji jest określona przez wektor $\mathbf{x} = [x_1,...,x_n]^T$, gdzie x_j – wartość przyjmowana przez *j* – tą zmienną. Oznaczmy przez *D* zbiór decyzji dopuszczalnych.

Stopień realizacji celu dany jest przez funkcję liczbową $f(x_1,...,x_n)$, krótko $f(x)$.

Problem wyboru

Wyznaczyć takie x^* dla którego $f(\mathbf{x})$ osiąga ekstremum, tj. znaleźć x^* , $x^* \in D$, dla którego :

(1) $f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x} \in D}\{f(\mathbf{x})\}$ lub $f(\mathbf{x}^*) = \min_{x \in D}\{f(\mathbf{x})\}$:

$\mathbf{x} \in D$ nazywamy rozwiązaniem dopuszczalnym, a $\mathbf{x}^*$ – optymalnym.

Zbiór *D* wyznacza się
- enumeracyjnie, podając wszystkie jego elementy,
- określa się definiując zależności funkcyjne, jakie muszą spełniać $\mathbf{x} \in D$.

Pierwszy sposób jest mało praktyczny (zbyt liczny zbiór *D*), lub niestosowalny (zbiór nieskończony).

Problem wyboru możemy przedstawić w postaci problemu programowania matematycznego (*PPM*). Ograniczymy się do analizy przypadku, gdy funkcja celu i warunki ograniczające są liniowymi funkcjami zmiennych. Problem programowania matematycznego przybiera wówczas postać problemu programowania liniowego (*PL*), nazywanego także liniowym zadaniem decyzyjnym (*LZD*).

5. Liniowe zadanie decyzyjne

Problem programowania liniowego w postaci ogólnej przybiera postać:

(2) $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

(3) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\dots,m,$$

(4) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = m+1,\dots,p,$$

(5) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = p+1,\dots,r,$$

(6) $$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n_1, n_1 \le n .$$

Parametrami są a_{ij}, c_j, b_i, a zmienne to x_j : c_j nazywa się wagami, a b_i ograniczeniami prawych stron. Zbiór D jest określony przez warunki (3) - (6).

Problem (2) – (6) jest problemem poszukiwania ekstremum warunkowego. Niekiedy, ze względów interpretacyjnych, jest on nazywany zadaniem *LZD* (liniowym zadaniem decyzyjnym).

Problemem programowania liniowego w postaci standardowej nazywamy problem :

(7) $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

(8) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\dots,m,$$

(9) $$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n ,$$

a w postaci kanonicznej problem :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,\dots,m,$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n .$$

6. Własności zadań programowania liniowego

Zbór rozwiązań zadania *PL* jest zbiorem wypukłym.

Zbiór ten może być
- ograniczony,
- nieograniczony,
- pusty.

Jeżeli zbiór *D* jest pusty, to mówimy, że problem jest sprzeczny. W przeciwnym przypadku problem jest niesprzeczny.

Niesprzeczny problem *PL* może mieć
- jedno rozwiązanie optymalne,
- nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych,
- może nie mieć skończonego rozwiązania.

Problem nie ma skończonego rozwiązania, jeżeli funkcja celu nie jest ograniczona z góry (z dołu).

Rozwiązanie optymalne problemu *PL* jest punktem brzegowym (w szczególności wierzchołkowym) zbioru *D*.

Warunek *i* – ty nazywamy
- istotnym, gdy jego usunięcie zmienia zbiór *D*,
- nieistotnym, gdy jego usunięcie nie powoduje takiej zmiany.

Pominięcie warunków nieistotnych, zmniejszając rozmiar zadania, ułatwia jego rozwiązanie.

Warunek *i* – ty nazywamy wiążącym ze względu na rozwiązanie optymalne, gdy jego pominięcie powoduje zmianę rozwiązania optymalnego. W przeciwnym przypadku warunek nazywamy niewiążącym.

Jeżeli *PL* będący modelem problemu decyzyjnego jest sprzeczny, świadczy to o uwzględnieniu zbyt wielu ograniczeń. Nieograniczoność funkcji celu świadczy o nieuwzględnieniu istotnych ograniczeń.

7. Formułowanie zadań - zagadnienie wyboru optymalnego asortymentu produkcji

1. Sformułowanie problemu w postaci werbalnej

Przedsiębiorstwo wytwarza *n* wyrobów zużywając *m* surowców. Na podstawie badań marketingowych i danych z ewidencji księgowej i norm technicznych określono ceny zbytu wyrobów, normy zużycia surowców oraz ich możliwości przerobu w rozpatrywanym okresie. Wyznaczyć asortyment produkcji maksymalizujący przychód.

2. Sformułowanie problemu w postaci problemu programowania liniowego

Wprowadźmy następujące oznaczenia :
- n - ilość wyrobów,
- m - ilość surowców,
- a_{ij} - nakład *i*-tego surowca niezbędny do wytworzenia jednostki *j* -tego wyrobu,
- b_i - możliwości przerobu *i*-tego surowca w okresie planistycznym,
- c_j - cena zbytu *j* - tego wyrobu,
- x_j - wielkość produkcji wyrobu *j*.

Asortyment produkcji określa wektor $\mathbf{x} = [x_1,...,x_n]^T$. Pozostałe wielkości są parametrami.
Przy przyjętych oznaczeniach postulat maksymalizacji przychodu można skwantyfikować przy pomocy (7), a ograniczenia możliwości przerobu surowców na wyroby przez (8). Zatem (7) - (9) jest modelem matematycznym sytuacji decyzyjnej.

Formułując model przyjęto następujące założenia:
- cena zbytu nie zależy od wielkości sprzedaży (co jest prawdą tylko w przypadku małego przedsiębiorstwa),
- zużycie surowca jest proporcjonalne do wielkości produkcji.

Uzasadnieniem ekonomicznym dla maksymalizacji przychodu może być chęć zdobycia rynku. Ponadto, management firmy jest często wynagradzany w zależności nie od zysku, ale wielkości sprzedaży.
Wybór funkcji celu nie jest oczywisty. Właściciele mogą być zainteresowani maksymalizacją zysku (np. gdy firma jest spółką akcyjną). Pracownicy mogą być zainteresowani asortymentem produkcji maksymalizującym liczbę przepracowanych godzin.
Wybór celu oraz postępowanie w przypadku istnienia wielu celów stanowi przedmiot zainteresowań programowania wielokryterialnego.

Wyznaczenie wartości parametrów w rozsądnym czasie i przy rozsądnych kosztach decyduje o możliwości praktycznego wykorzystania modelu.

Skłonność do sprowadzania problemów decyzyjnych do zadań *PL* wynika z
- łatwości wyznaczenia rozwiązania optymalnego zadań *PL*,
- powszechnej dostępności niezbędnych pakietów obliczeniowych (tzw. solverów).

3. Wyznaczanie rozwiązania optymalnego problemy wyboru optymalnego asortymentu produkcji

Rozważmy zadanie, w którym występują dwa wyroby i dwa surowce. Powiedzmy, że ceny zbytu wyrobów wynoszą 2 zł za jednostkę, możliwości przerobu surowców w okresie planistycznym 18 i 24 t, a jednostkowe nakłady surowców niezbędne do wytworzenia wyrobów podaje tabela (kg/jednostke) :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie *PL* przyjmuje następującą postać :

$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 \to \max \\ &6x_1 + 4x_2 \le 24 \\ &3x_1 + 4x_2 \le 18 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Zadanie z dwiema zmiennymi można rozwiązać metodą geometryczną.

8. Metoda geometryczna.

Obrazem geometrycznym nierówności nieostrej (ostrej) jest półpłaszczyzna z brzegiem (bez brzegu). Zbiór *D* stanowi wspólną część półpłaszczyzn.

Zbiór punktów, dla których funkcja przyjmuje tą samą wartość, nazywamy izokwantą (warstwicą).
Jeżeli funkcja jest funkcją liniową, to izokwanta jest prostą.

W celu wyznaczenia optimum zadania *PL* należy wyznaczyć izokwantę, dla której funkcja celu przyjmuje maksymalną (minimalną) wartość, mającą punkt (punkty) wspólne ze zbiorem *D*.